

EDN: KVUPDW

DOI: 10.22314/2073-7599-2026-20-1-37-44



Научная статья

УДК 631.171:004



Оптимизация поворота при реверсивном движении автоматизированного машинно-тракторного агрегата

Захид Адыгезалович Годжаев¹,
доктор технических наук, профессор,
член-корреспондент Российской академии наук,
e-mail: fic51@mail.ru;

Сергей Анатольевич Васильев^{2,3},
доктор технических наук, профессор,
e-mail: vsa_21@mail.ru;

Сергей Александрович Мишин²,
ассистент, e-mail: supers.ya@yandex.ru;

Евгений Альбертович Максимов²,
кандидат технических наук, доцент,
e-mail: 89063830541@yandex.ru;

Владимир Петрович Филиппов²,
кандидат физико-математических наук, доцент,
e-mail: filippov_v_p@mail.ru

¹Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва, Российская Федерация;

²Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Чувашская Республика, Российская Федерация;

³Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, г. Княгинино, Российская Федерация

Реферат. Отметим, что в применении беспилотных технологий важную роль играет планирование пути агрегата. Машинно-тракторные агрегаты (МТА), оснащенные автоматизированными системами управления и навесными сельскохозяйственными машинами, способны выполнять оригинальные способы движения и повороты на поле, в том числе реверсивное движение на склонах. На мелкоконтурных участках процент холостых ходов достаточно велик, и за счет минимизации пути или времени поворота можно увеличить производительность агротехнических приемов. (*Цель исследования*) Рассчитать оптимальный поворот при реверсивном движении автоматизированного машинно-тракторного агрегата. (*Материалы и методы*) Расчет оптимального движения на поворотной полосе для повышения эксплуатационной эффективности МТА является важной частью планирования маршрута. На ограниченном пространстве расчет оптимальной траектории поворота представляет собой сложную задачу динамической нелинейной оптимизации, трудно разрешимую традиционными численными методами. Рассмотрены дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода для криволинейного движения МТА в декартовой системе. Однако решения этой системы уравнений, определяющие семейство «иглочатых разворотов» реверсивного движения, будут постоянно ограничены. Для расчета короткого поворота в ограниченных условиях использовался метод оптимизации поворотной полосы. (*Результаты и обсуждение*) Разработаны кинематические модели МТА с роторной косилкой и сформулированы проблемы оптимизации движения на поворотной полосе с учетом эксплуатационных ограничений. Рассмотрены сценарии поворота от симметричного до несимметричного иглочатого и выбран оптимальный. Благодаря интеграции модели МТА в технологический процесс путем оптимизации на сельскохозяйственном участке был получен и рассчитан для заданных условий эксплуатации альтернативный вариант – фасонный поворот с определенными параметрами. (*Выводы*) Аналитические исследования автоматизированного МТА с косилкой показали, что значения эксплуатационных и геометрических показателей для фасонного поворота укладываются в минимальную ширину разворота 3,65 метра и длину пути 7,74 метра (характеристики мини-трактора «Уралец 22» и роторной косилки Н-17). **Ключевые слова:** машинно-тракторный агрегат, движение, оптимизация поворота, реверсивный способ, автоматизация.

■ **Для цитирования:** Годжаев З.А., Васильев С.А., Мишин С.А., Максимов Е.А., Филиппов В.П. Оптимизация поворота при реверсивном движении автоматизированного машинно-тракторного агрегата // *Сельскохозяйственные машины и технологии*. 2026. Т. 20. N1. С. 37-44. DOI: 10.22314/2073-7599-2026-20-1-37-44. EDN: KVUPDW.

Scientific article

Optimization of Turning Maneuvers in Reversible Motion of an Automated Agricultural Machine-Tractor Unit

Zakhid A. Godzhaev¹,
Dr.Sc.(Eng.), professor, corresponding member of the
Russian academy of sciences, e-mail: fic51@mail.ru;

Sergey A. Vasiliev^{2,3},
Dr.Sc.(Eng.), head of the department,
e-mail: vsa_21@mail.ru;

Sergey A. Mishin²,
assistant professor of the department,
e-mail: supers.ya@yandex.ru;

Evgeny A. Maximov²,
Ph.D.(Eng.), associate professor,
e-mail: 89063830541@yandex.ru;

Vladimir P. Filippov²,
Ph.D.(Phys.-Math.), associate professor,
e-mail: filippov_v_p@mail.ru;

¹Federal Scientific Agroengineering Center VIM, Moscow, Russian Federation;

²I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Chuvash Republic, Russian Federation;

³Nizhny Novgorod State Engineering and Economic University, Knyaginino, Russian Federation

Abstract. Path planning is a crucial component in the application of unmanned agricultural technologies. Machine-tractor units (MTAs) equipped with automated control systems and mounted agricultural implements are capable of executing non-standard motion trajectories and turning maneuvers under field conditions, including reversible motion on sloped terrain. On small-contour plots, the proportion of idle travel is relatively high; therefore, reducing travel distance or turning time can increase the productivity of agrotechnical operations. (*Research purpose*) To calculate the optimal turning maneuver during reversible motion of an automated machine-tractor unit. (*Materials and methods*) The calculation of optimal motion within the turning zone is a key element of route planning aimed at improving the operational efficiency of a machine-tractor unit (MTA). Under constrained headland conditions, optimization of the turning trajectory becomes a complex dynamic nonlinear problem that is difficult to solve using traditional numerical methods. The study considered Lagrange's second-order differential equations describing the curvilinear motion of a machine-tractor unit (MTA) in Cartesian coordinates. However, the solutions of this system of equations, which define a family of "needle turns" for reversible motion, are inherently constrained. Therefore, to compute a short turn under constrained conditions, a turning zone optimization method was used. (*Results and discussion*) The study led to the development of kinematic models of a machine-tractor unit (MTA) equipped with a rotary mower and to the formulation of motion optimization problems within the turning zone under operational constraints. Turning scenarios ranging from symmetric to asymmetric needle turns were evaluated, and the optimal configuration was identified. Integration of the machine-tractor unit (MTA) model into the technological workflow enabled the calculation of an alternative turning option, a shaped turn with specific parameters for the given operating conditions. (*Conclusions*) Analytical studies of the automated agricultural machine-tractor unit (MTA) with a rotary mower demonstrated that the geometric and performance parameters of the shaped turn fall within a minimum turning width of 3.65 meters and a path length of 7.74 meters, corresponding to the technical characteristics of the Uralets 22 mini-tractor and the N-17 rotary mower.

Keywords: machine-tractor unit (MTA), motion, turn optimization, reversible mode, automation.

■ **For citation:** Godzhaev Z.A., Vasiliev S.A., Mishin S.A., Maximov E.A., Filippov V.P. Optimization of turning maneuvers in reversible motion of an automated agricultural machine-tractor unit (MTA). *Agricultural Machinery and Technologies*. 2026. Vol. 20. N1. 37-44 (In Russian). DOI: 10.22314/2073-7599-2026-20-1-37-44. EDN: KVUPDW.

Автоматизированное планирование пути прохождения машинно-тракторного агрегата при работе на сельскохозяйственных полях имеет важное значение. Это относится, в частности, к движению на поворотной полосе [1], которое должно выполняться за минимальное время в ограниченных условиях [2]. Управление поворотом может способствовать экономии времени и топлива, а также более высокой эффективности использования поля при запланированной рациональной траектории [3]. В связи с этим оптимизация траектории сельскохозяйственных машин с автоматическими системами управления разворотом на полосе представляет собой актуальный аспект (Годжаев З.А., Шевцов В.Г., Измайлов А.Ю. и др. Концепция создания семейства сельскохозяйственных мобильных энергосредств с комплексами адаптивных машин и агрегатов до 2030 года. М.: ВИМ. 2024. 86 с.).

Из-за сложности модели движения машинно-тракторного агрегата (МТА) алгоритмы линейной оптимизации непригодны для решения данной задачи [4]. Для планирования траектории неголономных мобильных энергетических средств исследовались различные схемы нелинейной оптимизации [5]. В частности, изучались субоптимальные (почти оптимальные) методы, комбинирующие дискретную выборку пространства состояний с последующей численной оптимизацией или сглаживанием траектории; к ним относятся, например, алгоритм частичного сокращения [6] и расширяемый мета-алгоритм [7]. Кроме того, разрабатывались асимптотически оптимальные планировщики. Например, теоретически анализировалась схема планирования и динамического перепланирования на основе выборки [8], а также рассматривались и оценивались методы учета динамических ограничений [9].

В наших исследованиях были предложены оптимизированные перемещения МТА на сельскохозяйственном поле [10, 11]. Для склоновых земель, изрезанных оврагами и балками, установлена возможность сокращения времени выполнения сельскохозяйственных операций до 23% [12].

Задачу численной оптимизации траектории перемещения МТА решают двумя методами: косвенным и прямым [13]. Косвенные методы требуют аналитического вывода необходимых условий оптимальности из вариационного исчисления, что ведет к введению дополнительных (сопряженных) переменных. Однако при их использовании итоговая система, включающая дифференциальные уравнения, граничные условия и ограничения, часто представляет собой сложный математический аппарат.

Прямые решения преобразуют проблему в задачу нелинейного программирования, которая интерпретируется из задачи непрерывного оптимального управления в задачу оптимизации параметров [14, 15]. По сравнению с косвенными методами прямые методы значительно развились, как отмечается в [16], и используются в коммерческих продуктах для управления техникой.

Известно, что на мелкоконтурных участках процент холостых ходов достаточно велик, поэтому можно увеличить эксплуатационную эффективность МТА за счет минимизации времени или пути при повороте [17]. МТА, оснащенные автоматизированными системами управления и навесными сельскохозяйственными машинами, могут выполнять оригинальные способы движения и повороты, в том числе реверсивное движение на склонах (Измайлов А.Ю., Кряжков В.М., Антышев Н.М. и др. Концепция модернизации сельскохозяйственных тракторов и тракторного парка России на период до 2020 года. М.: ВИМ. 2012. 56 с.).

Цель исследований. Рассчитать оптимальный поворот при реверсивном способе движения автоматизированного сельскохозяйственного машинно-тракторного агрегата для повышения эксплуатационной эффективности.

Материалы и методы. Реверсивное движение МТА выполняется преимущественно при механизированных работах в особо сложных условиях, таких как проведение агротехнических и лесовосстановительных операций на склоновых землях и др. Поворот при реверсивном движении на поворотной полосе сельскохозяйственного участка можно представить в виде общей схемы на рисунке 1.

В данном случае поворотная полоса расположена между двумя «запрещенными» зонами, за их границы можно принять параллельные прямые линии. Предполагается, что МТА проедет от начальной точки 1 до конечной точки 2, расположенные на нижней граничной линии. В процессе поворота

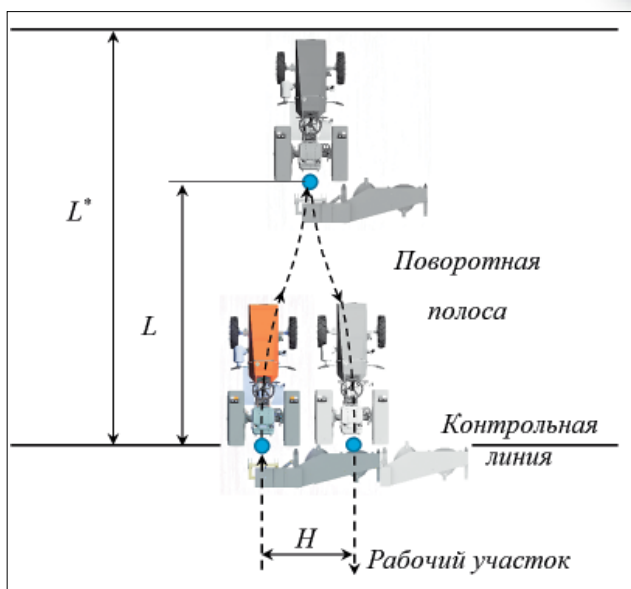


Рис. 1. Схема поворота при реверсивном движении машинно-тракторного агрегата на поворотной полосе
Fig. 1. Kinematic diagram of a reversible turning maneuver of the machine-tractor unit on the headland strip

траектория ограничивается зоной разворота, и въезд МТА в запрещенные зоны недопустим. При таком сценарии цели оптимизации следующие:

- минимальная ширина поворотной полосы L^* ;
- минимальный путь на повороте;
- минимальное время воздействия на рулевое колесо t .

На разворотной полосе МТА обычно движется на относительно низких скоростях, чтобы избежать ситуации недостаточной поворачиваемости. При таком допущении состояние системы будет незначительно изменяться в процессе поворота, поскольку динамика МТА может быть несколько ограничена. В кинематической модели МТА будем предполагать, что шины колес движутся в том направлении, в котором они повернуты. Кроме того, реакция трактора на рулевое управление будет определяться только геометрическими параметрами.

Рассмотрим модель криволинейного движения на разворотной полосе. Используя уравнения Лагранжа второго рода, можно рассмотреть закономерности движения МТА:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия, Дж; q_i – обобщенные координаты, м; $\dot{q}_i$ – производные от обобщенных координат по времени, м/с; Q_i – обобщенные силы, Н.

Применительно к рассматриваемому случаю криволинейного перемещения целесообразно использовать обобщенные координаты: переменную продольную x , переменную поперечную y , а также

угол расположения продольной оси МТА относительно оси OX . Для криволинейного движения МТА на разворотной полосе уравнения Лагранжа второго рода в декартовой системе координат могут быть записаны в виде системы из трех дифференциальных уравнений второго порядка с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} m(\ddot{x} + l_1 \cos \beta (\dot{\beta})^2 + l_1 \sin \beta \ddot{\beta}) = \\ = \sum_{i=1}^2 (P_{ki} - P_{fi}) \cos(\beta + \alpha) + \sum_{i=3}^4 (P_{ki} - P_{fi}) \cos \beta + \\ + \sum_{i=1}^2 P_{\delta i} \sin(\beta + \alpha) + \sum_{i=3}^4 P_{\delta i} \sin \beta - P_{kp} \cos(\beta - \alpha), \\ m(\ddot{y} + l_1 \sin \beta (\dot{\beta})^2 - l_1 \cos \beta \ddot{\beta}) = \\ = \sum_{i=1}^2 (P_{ki} - P_{fi}) \sin(\beta + \alpha) + \sum_{i=3}^4 (P_{ki} - P_{fi}) \sin \beta + \\ + \sum_{i=1}^2 P_{\delta i} \cos(\beta + \alpha) - \sum_{i=3}^4 P_{\delta i} \cos \beta + P_{kp} \sin(\beta - \alpha), \\ m(\ddot{x} + l_1 \cos \beta (\dot{\beta})^2 + l_1 \sin \beta \ddot{\beta}) l_1 \sin \beta + \\ + (\dot{x} + l_1 \sin \beta \dot{\beta}) l_1 \cos \beta (\dot{\beta} - (\beta)^2) + \\ + m(\ddot{y} + l_1 \sin \beta (\dot{\beta})^2 - l_1 \cos \beta \ddot{\beta}) (-l_1 \cos \beta) + \\ + (\dot{y} - l_1 \cos \beta \dot{\beta}) l_1 \sin \beta (\dot{\beta} - (\beta)^2) + \\ + l\ddot{\beta} = \sum_{i=1}^2 l_1 (P_{ki} - P_{fi}) \sin \alpha - \sum_{i=1}^2 l_1 P_{\delta i} \cos \alpha - \\ - \sum_{i=3}^4 (P_{ki} - P_{fi}) \frac{B_1}{2} - \sum_{i=3}^4 (P_{ki} - P_{fi}) \frac{B}{2} - \\ - \sum_{i=3}^4 l_2 P_{\delta i} - (l_{kp} + l_2) P_{kp} \sin \gamma - M_c, \end{cases} \quad (2)$$

где m – масса МТА, кг; l_1 – расстояние от передней оси до центра тяжести МТА, м; l_2 – расстояние от задней оси до центра тяжести МТА, м; α и β – углы наклона МТА, град; P_{kp} – крюковое усилие, Н; P_f – сила сопротивления качению колес, Н; B – колея колес, м; l_{kp} – расстояние от задней оси до сцепного устройства, м; M_c – момент силы сопротивления повороту, Н/м.

Для нашего случая одним из оптимизируемых параметров при решении системы уравнений (2) будет ширина разворотной полосы. Предлагаемый игольчатый поворот – это обычный вид поворота для реверсивного способа движения, при котором минимальный радиус поворота МТА определяет длину пути. Повышение эффективности использования всей площади сельскохозяйственного участка требует максимального сужения поворотной полосы, а это в свою очередь затрудняет разворот при выходе на следующий гон. Поэтому решения системы (2), определяющие семейство игольчатых разворотов, будут постоянно ограничены.

Основным ограничителем выступает невозможность уменьшить радиус разворота техники, следовательно, увеличить кривизну траектории, что превращает траекторию в набор сопряженных дуг окружности.

Однако, несмотря на жестко заданные пределы изменения значения кривизны траектории МТА, для получения достоверного результата остается

возможность варьировать интервалы, в которых можно «переключить» значение радиуса разворота на противоположное.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ. Поскольку в исследовании выбрана модель для МТА в составе минитрактора «Уралец 224» и роторной косилки Н-17, то приняты фиксированные параметры этих машин. Задача оптимальных временных затрат на повороте эквивалентна задаче о кратчайшей траектории МТА. Так как скорость будем считать постоянной, то угол поворота служит единственным управляющим параметром.

Решим аналитическим методом задачу о кратчайшей траектории при постоянной скорости с использованием геометрического представления поворотов МТА: симметричного, несимметричного и фасонного (фигурного) (рис. 2).

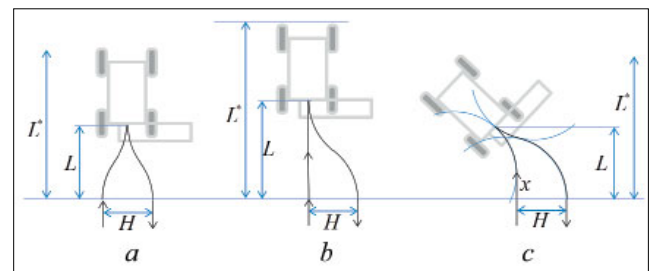


Рис. 2. Схемы игольчатых поворотов при реверсивном движении МТА на поворотной полосе: а – симметричный; б – несимметричный; в – фасонный

Fig. 2. Kinematic diagrams of needle turns for reversible motion of the machine-tractor unit on the headland strip: а – symmetric; б – asymmetric; в – shaped

Минимальный радиус поворота достигается за счет колесной базы и максимального угла поворота управляемых колес трактора:

$$R_{\min} = \frac{l}{\tan \theta}, \quad (3)$$

где l – колесная база трактора, м; θ – максимальный угол поворота управляемых колес трактора, град.

Разобьем траекторию пути в процессе симметричного игольчатого поворота на этапы. Четыре «фазы» можно увидеть на схеме управления углом поворота рулевого колеса (рис. 2а). Трактор вначале поворачивает вправо, затем влево, далее выполняет симметричные действия, совершая поворот в форме иглы, и завершает трек.

Таким образом, траектория поворота состоит из четырех дуг окружности, соответствующих углу γ для минимального радиуса разворота R . Тогда минимальное расстояние от границы разворотной полосы до задней навески трактора будет определяться по выражению:

$$L = 2R \sin \gamma, \quad (4)$$

где L – минимальное расстояние от границы разво-

ротной полосы до задней навески МТА, м; γ – угол, соответствующий дуге, лежащей на окружности минимального радиуса поворота МТА, град.

При этом согласно схемы (рис. 2а) выполняется условие:

$$R(1 - \cos \gamma) = \frac{H}{4}, \quad (5)$$

где H – расстояние между смежными проходами, м.

В итоге получим выражение:

$$L = 2R \sqrt{1 - \left(1 - \frac{H}{4R}\right)^2}. \quad (6)$$

Общая траектория симметричного игольчатого поворота имеет длину

$$S = 4R\gamma. \quad (7)$$

Принимая во внимание геометрические размеры МТА, задаем входящие параметры: минимальный радиус разворота – 4 м, расстояние между смежными проходами с минимальным перекрытием – 1,3 м. По результатам расчета минимальное расстояние от границы разворотной полосы до задней навески трактора при симметричном игольчатом повороте составит 3,16 м, центральный угол – 23°, общая длина пути – 6,49 м.

На второй схеме (рис. 2б) траектория несимметричного поворота состоит из прямой и двух дуг окружности, соответствующих центральному углу γ (во втором случае $\gamma = 33^\circ$). При этом выполняется условие:

$$R(1 - \cos \gamma) = \frac{H}{2}. \quad (8)$$

В итоге получим выражение:

$$L = 2R \sqrt{1 - \left(1 - \frac{H}{2R}\right)^2}. \quad (9)$$

Также принимая во внимание геометрические размеры МТА, получим минимальное расстояние от границы разворотной полосы до задней навески трактора при несимметричном игольчатом повороте, равное 4,37 м, и общую длину пути – 8,97 м.

Рассмотрим далее некоторый частный случай (рис. 2с), когда трактор начинает поворот после того, как проехал по прямой некоторое расстояние x . Общий путь МТА складывается из четырех частей:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (10)$$

где S_1 , S_2 , S_3 и S_4 – части пути, определяемые соответственно прямолинейным движением, при повороте налево, при повороте направо и при повороте снова налево, м.

Из расчетной схемы (рис. 3) фасонного игольчатого поворота МТА можем записать:

$$z = \sqrt{x^2 + H^2}, \quad (11)$$

$$h = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2}, \quad (12)$$

$$h = \sqrt{4R^2 - \frac{x^2 + H^2}{2}}, \quad (13)$$

$$\sin \delta = \frac{z}{4R}, \quad (14)$$

где x – расстояние, пройденное при прямолинейном движении, м; α и δ – расчетные углы, град.

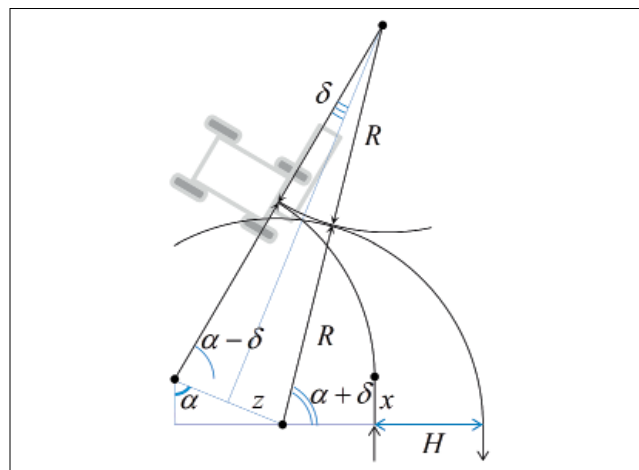


Рис. 3. Расчетная схема фасонного игольчатого поворота МТА на поворотной полосе

Fig. 3. Design diagram of a shaped needle turn of the machine-tractor unit on the headland strip

Найдем выражение для пути фасонного игольчатого поворота на поворотной полосе:

$$S(x) = x + R(\alpha - \delta) + R(2\delta) + R(\alpha + \delta) = x + 2R(\alpha + \delta). \quad (15)$$

После преобразований по формулам (9), (10) и (11) получаем, что общий путь является функцией от x :

$$S(x) = x + 2R \left(\arctg \frac{H}{x} + \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + H^2}}{4R} \right). \quad (16)$$

Аналогично по тем же формулам определяем ширину разворотной полосы как функцию от x :

$$L(x) = x + R \sin \left(\arctg \frac{H}{x} - \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + H^2}}{4R} \right). \quad (17)$$

Найдем производные от функций $S(x)$ и $L(x)$ по переменной x :

$$S'_x = 1 + 2R \left(-\frac{H}{x^2 + H^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2} \sqrt{16R^2 - (x^2 + H^2)}} \right), \quad (18)$$

$$L'_x = 1 - R \left(\frac{H}{x^2 + H^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2} \sqrt{16R^2 - (x^2 + H^2)}} \right) \times \cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{x^2 + H^2}}{4R} - \arctg \frac{H}{x} \right). \quad (19)$$

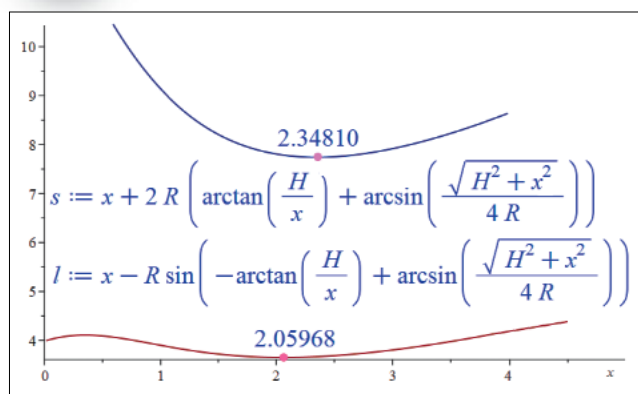


Рис. 4. Графики функций $S(x)$ и $L(x)$

Fig. 4. Graphs of $S(x)$ and $L(x)$ functions

Приравниваем выражения (18) и (19) к нулю для нахождения экстремальных точек. Графики функций $S(x)$ и $L(x)$ с найденными точками минимумов представлены на рисунке 4.

Таким образом, анализ функций на экстремум показывает, что они обе имеют минимумы (причем различные), которые численно определяется при подстановке реальных значений $H = 1,3$ м и $R = 4$ м, соответствующих рассматриваемому случаю.

В итоге минимальное значение пути на разворотной полосе $S(2,35) \approx 7,74$ м; разворотная полоса $L(2,35) \approx 3,67$ м. Если же минимизируется не путь, а ширина разворотной полосы, то $S(2,06) \approx 7,78$ м; разворотная полоса $L(2,06) \approx 3,65$ м. В данном случае различия практически несущественные и расстояние x , пройденное при прямолинейном движении, может быть выбрано из интервала 2,06-2,35 м.

Рассмотрение вопросов оптимизации процессов управления МТА позволит решать проблемы формирования парка сельскохозяйственных тракторов [17, 18] и повысить уровень интеллектуальных технологий точного земледелия [19, 20].

Выводы. Исследована возможность использования методов оптимизации для решения задачи короткого поворота в ограниченных условиях поворотной полосы. Рассмотрены дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода для криволинейного движения МТА на разворотной полосе в декартовой системе. Разработаны кинематические модели МТА с роторной косилкой и сформулированы проблемы оптимизации поворота на поворотной полосе путем включения его модели и учета эксплуатационных ограничений. Рассмотрены сценарии поворота на поворотной полосе при реверсивном движении – от симметричного до несимметричного игольчатого поворота и выбран оптимальный способ для МТА с роторной косилкой.

Интеграция модели МТА и реализация процесса оптимизации на сельскохозяйственном участке позволили получить альтернативный вариант – фасонный поворот с определенными параметрами при заданных условиях эксплуатации. Аналитические исследования автоматизированного сельскохозяйственного МТА с косилкой (приняты характеристики мини-трактора «Уралец 224» и роторной косилки Н-17) показали, что значения эксплуатационных и геометрических показателей для фасонного поворота укладываются в минимальную ширину разворота, равную 3,65 м и длину пути – 7,74 м.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Tu X., Tang L. Headland turning optimisation for agricultural vehicles and those with towed implements. *Journal of Agriculture and Food Research*. 2019. 1. 100009. DOI: 10.1016/j.jafr.2019.100009.
2. Ненайденко А.С., Поддубный В.И., Валекжанин А.И. Моделирование управления движением колесной сельскохозяйственной машины в режиме реального времени // *Тракторы и сельхозмашины*. 2018. N3. С. 32-38. EDN: XSEMKD.
3. Годжаев З.А., Гришин А.П., Гришин А.А., Гришин В.А. Беспилотное мобильное энергосредство сельскохозяйственного назначения // *Тракторы и сельхозмашины*. 2016. N10. С. 41-44. EDN: WWHVXJ.
4. Oksanen T., Visala A. Optimal control of tractor-trailer system in headlands. *ASABE Paper*. N701P1004. MI. 2004. DOI: 10.13031/2013.17842.
5. Измайлов А.Ю., Лобачевский Я.П., Ценч Ю.С. и др. О синтезе роботизированного сельскохозяйственного мобильного агрегата // *Вестник российской сельскохозяйственной науки*. 2019. N4. С. 63-68. DOI: 10.30850/vrsn/2019/4/63-68.
6. Geraerts R., Overmars M. Creating high-quality paths for motion planning. *International Journal of Robotics Research*. 2007. N26. 845. DOI: 10.1177/0278364907079280.
7. Luna R., Sucan I., Moll M., Kavraki L. Anytime solution optimization for sampling-based motion planning. *Proc. 2013 IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation*. 2013. 5068-5074. DOI: 10.1109/ICRA.2013.6631301.
8. Otte M., Frazzoli E. RRTX: asymptotically optimal single-query sampling-based motion planning with quick replanning. *International Journal of Robotics Research*. 2016. N35(7). 797-822. DOI: 10.1177/0278364915594679.
9. Cariou C., Gobor Z., Seifert B., Berducot M. Mobile robot trajectory planning under kinematic and dynamic constraints for partial and full field coverage. *Journal of Field Robotics*. 2016. N34 (7). 1297-1312 (2017). DOI: 10.1002/rob.21707.
10. Васильев С.А., Васильев А.А., Затылков Н.И. Противозероизонная контурная обработка почвы машинно-тракторными агрегатами на агроландшафтах склоновых земель // *Вестник НГИЭИ*. 2018. N5 (84). С. 43-54. EDN: XNDFZR.
11. Ахалая Б.Х., Ценч Ю.С., Беляева Н.И. Автоматизиро-

- ванная почвообрабатывающая машина для послойной обработки почвы высокотурбулентной воздушной струей // *Сельскохозяйственные машины и технологии*. 2025. Т. 19. N2. С. 78-83. DOI: 10.22314/2073-7599-2025-19-2-78-83.
12. Васильев С.А., Лопоткин А.М., Васильев А.А. Разработка математической модели технологического процесса обработки склоновых земель противоэрозионным орудием // *Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование*. 2021. N4 (64). С. 334-344. DOI: 10.32786/2071-9485-2021-04-34.
 13. Conway B.A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *Journal of optimization theory and applications*. 2012. 152 (2). 271-306. DOI: 10.1007/s10957-011-9918-z.
 14. Fahroo F., Ross I.M. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2002. 25 (1). 160-166. DOI: 10.2514/2.4862.
 15. Коротченя В.М., Ценч Ю.С., Лобачевский Я.П. Система машин как фактор научно-технического прогресса в агропромышленном комплексе // *Российская сельскохозяйственная наука*. 2024. N4. С. 67-72. DOI: 10.31857/S250026272404012.
 16. Измайлов А.Ю., Лобачевский Я.П., Хорошенков В.К. и др. Оптимизация управления технологическими процессами в растениеводстве // *Сельскохозяйственные машины и технологии*. 2018. Т. 12. N3. С. 4-11. DOI: 10.22314/2073-7599-2018-12-3-4-11.
 17. Кряжков В.М., Годжаев З.А., Шевцов В.Г. и др. Проблемы формирования инновационного парка сельскохозяйственных тракторов России // *Сельскохозяйственные машины и технологии*. 2015. N3. С. 9-14. EDN: TTLVRR.
 18. Лачуга Ю.Ф., Измайлов А.Ю., Лобачевский Я.П. и др. Приоритетные направления научно-технического развития отечественного тракторостроения // *Техника и оборудование для села*. 2021. № 2 (284). С. 2-7. DOI: 10.33267/2072-9642-2021-2-2-7.
 19. Ценч Ю.С., Косенко В.В., Шаров В.В. Эволюция конструкций гусеничных тракторов общего назначения // *Тракторы и сельхозмашины*. 2022. Т. 89. Т. 3. С. 155-166. DOI: 10.17816/0321-4443-109676.
 20. Васильев С.А. Интеллектуальная технология контроля качества обработки почвы в системе точного земледелия // *Земледелие*. 2022. N3. С. 36-41. EDN: ZGGQUG.

REFERENCES

1. Tu X., Tang L. Headland turning optimisation for agricultural vehicles and those with towed implements. *Journal of Agriculture and Food Research*. 1, 2019, 100009 (In English). DOI: 10.1016/j.jafr.2019.100009.
2. Nenajdenko A.S., Poddubnyj V.I., Valekzhanin A.I. Modeling the movement control of a wheeled agricultural machine in real time. *Tractors and Agricultural Machinery*. 2018. N3. 32-38 (In Russian). EDN: XSEMKD.
3. Godzhaev Z.A., Grishin A.P., Grishin A.A., Grishin V.A. Unmanned mobile power unit for agricultural purposes. *Tractors and agricultural machinery*. 2016. N10. 41-44 (In Russian). EDN: WWHVXJ.
4. Oksanen T., Visala A. Optimal control of tractor-trailer system in headlands. *ASABE Paper N701P1004*. 2004 (In English). DOI: 10.13031/2013.17842.
5. Izmaylov A.Yu., Lobachevsky Ya.P., Tsench Yu.S. et al. About synthesis of robotic agriculture mobile machine. *Vestnik of the Russian Agricultural Science*. 2019. N4. 63-68 (In Russian). DOI: 10.30850/vrsn/2019/4/63-68.
6. Geraerts R., Overmars M. Creating high-quality paths for motion planning. *International Journal of Robotics Research*. 2007. N26. 845 (In English). DOI: 10.1177/0278364907079280.
7. Luna R., Sucan I., Moll M., Kavraki L. Anytime solution optimization for sampling-based motion planning. *Proc. 2013 IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation*. 2013. 5068-5074 (In English). DOI: 10.1109/ICRA.2013.6631301.
8. Otte M., Frazzoli E. RRTX: asymptotically optimal single-query sampling-based motion planning with quick replanning. *International Journal of Robotics Research*. 2016. N35(7). 797-822 (In English). DOI: 10.1177/0278364915594679.
9. Cariou C., Gobor Z., Seiferth B., Berducat M. Mobile robot trajectory planning under kinematic and dynamic constraints for partial and full field coverage. *Journal of Field Robotics*. 2016. N34 (7). 1297-1312 (In English). DOI: 10.1002/rob.21707.
10. Vasilyev S.A., Vasilyev A.A., Zatytkov N.I. Anti-erosion contour tillage machine-tractor units on the agricultural landscapes of sloping land. *Vestnik NGIEI*. 2018. N5 (84). 43-54 (In Russian). EDN: XNDFZR.
11. Akhalaya B.Kh., Tsench Yu.S., Belyaeva N.I. Automated layer-by-layer soil tillage machine using a highly turbulent air jet. *Agricultural Machinery and Technologies*. 2025. Vol. 19. N2. 78-83 (In Russian). DOI: 10.22314/2073-7599-2025-19-2-78-83.
12. Vasiliev S.A., Lopotkin A.M., Vasiliev A.A. Development of a mathematical model of the technological process of processing slope lands with an anti-erosion weapon. *Proceedings of the Nizhnevolsky Agrouniversity complex: Science and higher professional education*. 2021. N4 (64). 334-344 (In Russian). DOI: 10.32786/2071-9485-2021-04-34.
13. Conway B.A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2012. 152 (2). 271-306 (In English). DOI: 10.1007/s10957-011-9918-z.
14. Fahroo F., Ross I.M. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2002. 25 (1). 160-166 (In English). DOI: 10.2514/2.4862.

15. Korotchenya V.M., Tsench Yu.S., Lobachevsky Ya.P. The machine system as a factor of scientific and technological progress in agro-industrial complex. *Russian Agricultural Sciences*. 2024. N4. 67-72 (In Russian). DOI: 10.31857/S250026272404012.
16. Izmailov A.Yu., Lobachevsky Ya.P., Khoroshenkov V.K. et al. Optimization of technological process control in crop production. *Agricultural Machinery and Technologies*. 2018. Vol. 12. N3. 4-11 (In Russian). DOI: 10.22314/2073-7599-2018-12-3-4-11.
17. Kryazhkov V.M., Gojaev Z.A., Shevtsov V.G. et al. Problems of formation of Russian innovative agricultural tractors fleet. *Agricultural Machinery and Technologies*. 2015. N3. 9-14 (In Russian). EDN: TTLVRR.
18. Lachuga Yu.F., Izmailov A.Yu., Lobachevskij Ya.P. Priority areas of scientific and technical development of the domestic tractor industry. *Machinery and Equipment for Rural Area*. 2021. N2(284). 2-7 (In Russian). DOI: 10.33267/2072-9642-2021-2-2-7.
19. Tsench Yu.S., Kosenko V.V., Sharov V.V. The evolution of design of general purpose tracked tractors. *Tractors and Agricultural Machinery*. 2022. Vol. 89. N3. 155-166 (In Russian). DOI: 10.17816/0321-4443-109676.
20. Vasiliev S.A. Intelligent technology for quality control of soil tillage in the precision farming system. *Agriculture*. 2022. N3. 36-41 (In Russian). EDN: ZGGQUG.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Заявленный вклад соавторов:

Годжаев З.А. – постановка задачи, обоснование математических моделей и технический средств;

Васильев С.А. – формулирование основной концепции исследования;

Мишин С.А. – графическое представление результатов, анализ литературы, описание результатов исследования;

Максимов Е.А. – оптимизация математических моделей, подготовка текста, формирование выводов;

Филлипов В.П. – разработка методологии и формирование выводов исследования.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Coauthors' contribution:

Godzhaev Z.A. – problem statement, substantiation of mathematical models and technical means;

Vasiliev S.A. – formulation of the basic concept of the study, development of research methodology, formation of conclusions;

Mishin S.A. – graphical representation of the results, description of the results and formation of conclusions of the study;

Maximov E.A. – optimization of mathematical models, text preparation, drawing conclusions;

Fillipov V.P. – development of methodology and formation of research conclusions.

The authors read and approved the final manuscript.

Статья поступила в редакцию

Статья принята к публикации

The paper was submitted to the Editorial Office on

The paper was accepted for publication on

01.12.2025

20.02.2026